***Простое отношение трех точек.***

Рассмотрим еще один пример. Пусть  состоит из упорядоченных троек попарно несовпадающих точек. Поставим вопрос: любые ли тройки из  аффинно эквивалентны? Другими словами, постараемся найти критерий, когда для двух троек из  существует аффинное преобразование, переводящее одну тройку в другую.

Сразу заметим, что для тройки точек  возможны варианты:

,

либо

.

В ситуации точки  лежат на одной прямой. Такие точки (тройки точек) будем называть *коллинеарными*, а их множество обозначим . Условие же определяет множество  в , состоящее из троек точек, через которые нельзя провести прямую (не лежащие на одной прямой). Ясно, что  и  задают разбиение .

Любые две тройки точек из * аффинно эквивалентны*. В самом деле, для любых двух троек  и  из  системы векторов  и  линейно независимы, следовательно, их можно дополнить до базисов и .

Существует единственное аффинное преобразование  пространства , переводящее репер



в репер

.

При этом

.

Пусть . Тогда  такое, что



и для линейной части  аффинного преобразования  выполняется соотношение



или, что ‑ то же самое,

.

Это означает, что, если тройки коллинеарных точек  и  аффинно эквивалентны, то в равенствах  и  должно быть . Таким образом, число  в есть аффинный инвариант – оно сохраняется при аффинных преобразованиях. Это число называют *простым отношением трех точек*  в аффинном пространстве. Если простые отношения двух троек коллинеарных точек не равны, то эти тройки не являются аффинно эквивалентными.

Пусть теперь простые отношения двух троек коллинеарных точек  и  совпадают:  и . Ненулевые векторы  и  можно дополнить до базисов  и  всего пространства. Для реперов  и  существует единственное аффинное преобразование , переводящее первый репер во второй. При этом

,

,



.

Таким образом *доказана*

***Теорема 1.*** Две тройки коллинеарных точек аффинно эквивалентны тогда и только тогда, когда совпадают их простые отношения.

***Определение 1.*** Будем говорить, что точка  ***лежит между*** точками  и , если тройка точек  коллинеарна и ее простое отношение  удовлетворяет соотношению . Множество точек, лежащих между  и  вместе с этими точками, будем называть *отрезком* с концами в точках  и  и обозначать 

Если пара точек  и  при аффинном преобразовании переходит в пару точек  и , то (так как простое отношение трех точек – инвариант) *точки, лежащие между*  и , *перейдут* в *точки, лежащие между*  и . Таким образом при аффинном преобразовании отрезок переходит в отрезок.

***Определение 2.*** Точка , лежащая между точками  и  называется серединой отрезка , если простое отношение тройки  равно 1.

Так как простое отношение тройки  ‑ инвариант, то при аффинном преобразовании *середина отрезка переходит в середину отрезка*.

***Определение 3.*** Точка  называется центром фигуры , если для любой точки  найдется точка , такая что  будет серединой отрезка .

Углубляясь в смысл соотношения введем следующее

***Определение 4.*** Набор из  точек  назовем аффинно независимым (точки набора назовем аффинно независимыми), если . В противном случае точки называются аффинно зависимыми.

Заметим, что  ‑ максимально возможная размерность аффинной оболочки множества, состоящего из  точек.

***Упражнение 2.*** Аффинно независимые наборы аффинно эквивалентны тогда и только тогда, когда они равномощны.

***Замечание 1.*** Иногда под репером удобно понимать упорядоченный набор из  аффинно независимых точек . Выбрав  в качестве начальной, находим  линейно независимых векторов . Наоборот: если  ‑ репер, то точки  будут аффинно независимы.